X $\sim_R$ Äquivalenzrelation

<u>Def (2.1.8):</u> Sei R eine Äquivalenzrelation auf X. Die <u>Äquivalenzklasse</u> eines Elements $x \in X$ ist die Teilmenge

$$[x] := \{ y \in X \mid y \sim_R x \} \subset X$$

<u>Def (2.1.8)</u> Die Menge der Äquivalenzklassen

$$X/_{\sim_R} := \{ [x] \mid x \in X \}$$

heißt <u>Quotientenmenge</u> von X nach der Relation R, und die kanonische Abb.

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X/_{\sim_R} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

heißt <u>Quotientenabb.</u>

Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Q$ definiert eine Äquivalenzrelation auf X:

$$x \sim_f y \quad :\Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y) \in Q$$

Die Äquivalenzklassen sind die Fasern von f:

$$[x] = \{ y \in X \mid y \sim_f x \}$$
$$= \{ y \in X \mid f(y) = f(x) \}$$
$$= f^{-1}(f(x))$$

Umgekehrt ist jede Äquivalenzrelation von dieser Form:

$$\sim \; = \; \sim_\pi \quad \text{für } \pi : X \longrightarrow X/\sim$$

$$\Big(x \sim_\pi y \Longleftrightarrow \underset{[x]}{\overset{\|}{\pi(x)}} = \underset{[y]}{\overset{\|}{\pi(y)}}$$

$$\Longleftrightarrow x \sim y \Big)$$

Jede surjektive Abbildung ist, bis auf Umbenennung der Elemente, eine Quotientenabbildung

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f\ (\text{surjektiv})"] \arrow[dr] & & Y \\ & X/{\sim_f} \arrow[ur, "\cong\ \text{bijektiv}"'] & \end{tikzcd}$$